

## ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PREY-PREDATOR-SUPER PREDATOR DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE I DAN HOLLING TIPE II

Ajeng Pramesti Putri

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : ajeng.18037@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: diansavitri@unesa.ac.id

### Abstrak

Interaksi *prey* dan *predator* dalam bidang ekologi menarik untuk dibahas dan dikaji perilaku dinamik antar populasinya. Perilaku persaingan antar populasi memperoleh makanan dapat digambarkan dalam suatu pola pemangsaan atau laju predasi. Penelitian ini membahas mengenai analisis kestabilan pada model *prey*, *predator*, *super predator* dengan laju predasi menggunakan fungsi respon yang berbeda. Berdasarkan fenomena dan asumsi interaksi antar populasi, fungsi respon yang digunakan untuk predasi *predator* terhadap *prey* adalah Holling tipe I, untuk laju predasi *super predator* terhadap *prey* dan *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Tahapan penelitian yaitu mengkonstruksi model, menentukan titik kesetimbangan dari sistem, proses linearisasi sistem untuk analisis kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, serta melakukan simulasi numerik menggunakan *software* Maple dan Python. Dari konstruksi model dan nilai parameter yang digunakan, secara analitik terdapat enam titik kesetimbangan dengan dua titik yang tidak stabil dan empat titik yang kestabilannya bergantung syarat tertentu. Hasil simulasi menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis kestabilan. Perubahan nilai parameter waktu yang dibutuhkan *super predator* untuk menangani *prey* mempengaruhi dinamika solusi sistem, yang ditampilkan dalam potret fase

**Kata Kunci:** *Prey-Predator-Super predator*, Holling Tipe I, Holling Tipe II.

### Abstract

The interaction of *prey* and *predators* in the field of ecology is interesting to discuss and study the dynamic behavior between populations. Competition behavior between populations for food can be described in a predation pattern or predation rate. This study discusses stability analysis in *prey*, *predator*, *super predator* models with predation rates using different response functions. Based on the phenomena and assumptions of interaction between populations, the response function used for *predator* predation against *prey* is Holling type I, for the rate of *super predator* predation against *prey* and *predators* using Holling type II response function. The steps that will be carried out are constructing the model, finding the system's equilibrium point, linearizing the system, analyzing the stability of the equilibrium point, and performing numerical simulations using *maple* and *python* software. From the model construction and the parameter values used, analytically there are six equilibrium points with two unstable points and four points whose stability depends on the given parameter values. The simulation result shot the result of the stability analysis. change in the value of the time parameter required for *super predator* to handle *prey* affect the dynamics of the system solution, which is shown in the phase portrait.

**Keywords:** *Prey-Predator-Super predator*, Holling Type I, Holling Type II.

### PENDAHULUAN

Pada bidang matematika biologi, model dinamika populasi sudah banyak dikembangkan. Model ini menunjukkan peristiwa perubahan yang terjadi pada suatu populasi, khususnya ekologi. Ekologi merupakan salah satu cabang ilmu biologi yang mempelajari interaksi antar suatu spesies dengan lingkungannya (Roy & Roy, 2015). Pemodelan matematika di bidang ekologi berkembang pesat setelah Lotka (1925) dan Volterra (1931) mengenalkan model *predator-prey* yang di

kenal sebagai model Lotka-Volterra. Model ekologi ini menjadi cikal bakal dikembangkannya model *prey-predator* lain, seperti model Rosenzweig-MacArthur (M. L. Rosenzweig, 1963; M. Moustafa, 2019; Saija, 2020) dan model Leslie-Gower (Y. Lin, 2016; Y.Cai, 2015; H. Ulfa, 2017). Kajian dinamika sistem ekologi yang kompleks menarik untuk dibahas lebih rinci. Salah satu komponen terpenting dari hubungan *predator-prey* yaitu fungsi respon. Holling memperkenalkan fungsi respon pada model *prey-predator* pada tahun 1953 yang kemudian dikenal dengan fungsi respon Holling, yaitu jumlah

mangsa yang berhasil diserang per per predator sebagai fungsi kepadatan mangsa (Solomon, 1949). Pola interaksi antara *prey* dan *predator* yang menunjukkan jumlah *prey* yang dikonsumsi oleh setiap *predator* persatuan waktu dapat disebut fungsi respon (Chakraborty, Samares, & Bairagi, 2012). Perilaku pola predasi antar tiga spesies telah dikaji beberapa peneliti terdahulu (Abadi & savitri, 2015; Savitri, Suryanto, Kusumawinahyu, & Abadi, 2019; Sarwardi, Mandal, & Ray, 2013). Sarwadi dkk. mengkaji model LotkaVoltera dengan satu *prey* dua *predator* serta mengasumsikan *predator*-1 dan *predator*-2 mengikuti fungsi respon Holling tipe II dalam predasi terhadap *prey* serta diasumsikan adanya kompetisi antara *predator*-1 dan *predator*-2. Kemudian Savitri dan Abadi (Dian & Abadi, 2015) juga membahas model satu *prey* dan dua *predator* dengan laju predasi kedua *predator* sama, mengikuti fungsi Holling tipe II, dengan asumsi *predator* pertama memangsa *prey* dan *predator* kedua memangsa *predator* pertama. Variasi fungsi respon dalam pola predasi kedua *predator* juga telah dibahas pada model (Abadi & savitri, 2015). Hadirnya *super predator* pada interaksi tiga spesies juga telah dibahas (Reddy, Narayan, & Ramacharyulu, 2010) dan (Savitri & Paniogoro, 2020) dengan menggunakan fungsi respon yang berbeda.

Berdasarkan latar belakang kajian peneliti terdahulu, maka kami tertarik mengkaji model matematika yang melibatkan 3 spesies, yaitu satu *prey*, satu *predator*, dan satu *super predator*. Berbeda kajian dengan yang telah dibahas Savitri (Savitri & Paniogoro, 2020), pada penelitian ini, *super predator* diasumsikan tidak hanya memangsa *prey*, tetapi juga memangsa *predator*. Laju predasi *prey* oleh *predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe I. sedangkan laju predasi *super predator* terhadap *prey* dan *predator* diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling tipe II karena *super predator* membutuhkan waktu dalam menangani kedua mangsanya, yaitu *prey* dan *predator* meliputi memburu, membunuh, memakan, dan mencerna serta diasumsikan *predator* tidak mencari makanan lain saat populasi *prey* rendah. Selain itu, penelitian ini juga sesuai dengan kondisi nyata di alam, dimana populasi katak yang merupakan *super predator*, laba-laba yang merupakan *predator*, dan juga nyamuk yang merupakan *prey*. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan pada model *prey - predator - super predator* dengan menggunakan fungsi respon berbeda, yaitu fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe II.

## KAJIAN TEORI

### Model Predator-prey tiga spesies

Kajian model *predator prey* tiga spesies telah di bahas oleh (Sarwardi, Mandal, & Ray, 2013) yang menjelaskan perilaku dinamik pada model *predator prey* yang terdiri dari satu *prey* dan dua *predator* serta mengikuti model Lotka-Volterra dengan perlindungan *prey* yang mempertimbangkan laju predasi *predator* terhadap *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe II yang dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy_1}{1 + a_1x} - \frac{\beta xy_2}{1 + a_2x} \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 xy_1}{1 + a_1x} - \mu_1 y_1 - \sigma_1 y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\beta_1 xy_2}{1 + a_2x} - \mu_2 y_2 - \sigma_2 y_1 y_2.\end{aligned}$$

Kajian Model satu *prey* dan dua *predator* juga telah dibahas oleh (Dian & Abadi, 2015) dengan mengkombinasikan laju predasi kedua *predator* yaitu *predator* 1 dan *predator* 2 menggunakan fungsi respon yang berbeda terhadap *prey*. Pada model tersebut, *predator* 2 memangsa *predator* 1 menggunakan fungsi respon Holling III dan memangsa populasi *prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Fungsi respon Holling tipe II digunakan dalam proses predasi populasi *predator* 1 terhadap populasi *prey*. Kedua *predator* diasumsikan saling berkompetisi dengan model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy_1}{1 + a_1x} - \frac{\beta xy_2}{1 + a_3x} \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 xy_1}{1 + a_1x} - \mu_1 y_1 - \frac{\rho y_2 y_1^2}{1 + a_2 y_1^2} \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\rho_1 y_2 y_1^2}{1 + a_2 y_1^2} + \frac{\beta_1 xy_2}{1 + a_3x} - \mu_2 y_2\end{aligned}$$

### Model predator-prey-super predator

(Savitri & Paniogoro, 2020) juga membahas *prey-predator* tiga spesies dengan fungsi respon yang berbeda serta diasumsikan populasi *prey* tumbuh secara logistik dan berkurang karena adanya predasi dari populasi *predator* dengan mengikuti fungsi respon Holling tipe I. Laju pertumbuhan *predator* mengikuti model Leslie-Gower dan berkurang karena adanya predasi oleh *super predator* dengan mengikuti fungsi respon Holling tipe II yang dimodelkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{\beta yz}{1 + my} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\beta_1 yz}{1 + my} - \mu z\end{aligned}$$

Berdasarkan model yang telah dibahas pada jurnal (Sarwardi, Mandal, & Ray, 2013; Dian & Abadi, 2015; Savitri & Paniogoro, 2020), maka pada penelitian ini,

dikonstruksi model *prey-predator-super predator* mengikuti model Lotka-Volterra menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II.

**METODE**

Pada proses penelitian, perlu menggunakan beberapa metode untuk mencapai tujuan penelitian.

a. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan melihat nilai eigennya. Dalam hal ini berarti nilai eigen berguna untuk mengetahui jenis kestabilan sistem mangsa pemangsa dalam penelitian ini.

$A$  merupakan sebuah matriks dan  $x$  merupakan vektor tak nol didalam  $\mathbb{R}^n$  yang dinamakan vektor eigen dari matriks  $A$  jika  $Ax$  merupakan kelipatan skalar dari  $x$  yaitu :

$$Ax = \lambda x.$$

Untuk skalar  $\lambda$  yang dinamakan nilai eigen dari matriks  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan .

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$  yang berukuran  $n \times n$  maka dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \\ Ax &= \lambda Ix, \\ (\lambda I - A)x &= 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan (Anton & Rorres, 2013) agar  $\lambda$  dapat menjadi suatu nilai eigen, maka harus terdapat solusi tak nol dari persamaan tersebut, dengan  $I$  merupakan matriks identitas. Persamaan  $(\lambda I - A)x = 0$  akan memiliki penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0.$$

Dimana persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik  $A$  dan nilai skalar yang memenuhi persamaan karakteristik tersebut merupakan nilai eigen dari  $A$ .

b. Kriteria Routh Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan apabila terdapat kesulitan dalam menyelesaikan akar-akar persamaan karakteristik berordo tinggi pada sistem. Diberikan persamaan karakteristik nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A_{n \times n}$  sebagai berikut:

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0,$$

dengan  $\alpha_0 \neq 0$  adalah koefisien dari persamaan karakteristik dari matriks  $A$ .

Tabel Routh-Hurwitz adalah tabel yang dibentuk berdasarkan pengurutan koefisien-koefisien dari matriks  $A$ . Berikut merupakan tabel Routh-Hurwitz:

Tabel 1: Routh-Hurwitz

$a_0$	$a_2$	$a_4$	...	$a_{2n-2}$
$a_1$	$a_3$	$a_5$	...	$a_{2n-2}$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	...

$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

dengan  $n = 1,2,3, \dots, k$  didefiinsikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \\ b_n &= \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}, c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1} \end{aligned}$$

Tabel Routh Hurwitz tersebut dilanjutkan mendatar dan menurun hingga diperoleh elemen-elemen pada kolom pertama bernilai nol. Suatu sistem dapat dikatakan stabil jika bagian real dari nilai eigennya bernilai negatif yang ditunjukkan dengan tidak terjadi perubahan pada setiap elemen kolom pertama pada tabel Routh-Hurwitz (Olsder & Woude, 1998).

1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian merupakan studi literatur dengan mengkaji konsep dan teori melalui berbagai sumber pustaka. Pustaka yang menjadi rujukan dalam penelitian ini berasal dari buku-buku, jurnal, artikel hasil penelitian terdahulu yang berhubungan dengan materi terkait, serta referensi lain yang mendukung penelitian. Selain mengkaji berbagai konsep dan teori, pada penelitian ini dilakukan penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan melihat tanda bilangan real pada nilai eigen sistem dan juga simulasi numerik untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analitik sistem yang diperoleh dengan perhitungan secara numerik menggunakan aplikasi Maple 18.

2. Tahapan Penelitian

Tahapan atau prosedur penelitian sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Kajian awal berupa studi literatur. Pada tahap studi literatur diawali dengan mengumpulkan sumber-sumber dari jurnal, buku, dan artikel terkait penelitian sebelumnya mengenai masalah yang dibahas, yaitu model *predator-prey-super predator* dengan mengikuti fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II. Studi literatur juga digunakan untuk membuat asumsi-asumsi dasar dari model yang digunakan dalam penelitian ini.

- b. Mengkonstruksi Model *prey - predator -super predator* dengan fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II.

Peneliti menentukan asumsi yang digunakan disesuaikan fenomena nyata pada saat mengkonstruksi model tiga spesies, yaitu *prey - predator -super predator* dengan mengikuti fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe II. Model yang digunakan merupakan pengembangan dari model yang telah dikaji oleh Savitri & Hasan (2020) dan (Roy & Roy, 2015).

- c. Menentukan Titik Keseimbangan

Peneliti menentukan titik keseimbangan dari model tiga spesies yaitu *prey-predator* dan *super predator* dengan fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe II.

- d. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Pada tahap ini peneliti menganalisis model dengan menentukan kestabilannya. Karena persamaan model merupakan persamaan diferensial nonlinear maka perlu dilakukan proses linearisasi terlebih dahulu terhadap persamaan model. Dengan membentuk matriks Jacobian, selanjutnya menentukan kestabilan titik keseimbangan dengan kriteria nilai eigen. Apabila analisis nilai eigen terlalu sulit, maka kestabilan titik keseimbangan dapat diselesaikan dengan kriteria Routh-Hurwitz.

- e. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk melihat perilaku kestabilan di sekitar titik keseimbangan pada model *prey-predator-super predator* menggunakan *software* Python serta untuk mengecek kebenaran hasil analitik kestabilan model mangsa pemangsa. Nilai parameter yang digunakan diperoleh dari asumsi serta jurnal yang diteliti oleh (Savitri & Paniogoro, 2020) dan (Roy & Roy, 2015).

- f. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis dan simulasi model *prey-predator-super predator* mempertimbangkan fungsi respon Holling tipe I dan fungsi respon Holling tipe II.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Konstruksi Model *prey - predator - super predator*

Pada bagian ini dilakukan konstruksi model *prey-predator-super predator* berdasarkan rancangan penelitian. Hasil kajian awal menggambarkan model *prey-predator* yang telah dibahas peneliti terdahulu sebagai dasar kajian awal melalui tahapan studi literatur.

- a. Pertumbuhan Populasi *Prey*

Kepadatan populasi *prey* direpresentasikan sebagai  $x$  pada waktu  $t$ . Populasi *prey* tumbuh secara logistik  $rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$  dengan  $r$  merupakan laju pertumbuhan intrinsik *prey*, dan asumsi tanpa adanya *predator* serta adanya batas daya tampung lingkungan  $K$ . Laju pertumbuhan *prey* berkurang dengan predasi atau pemangsaan *predator* dan *super predator* terhadap *prey*. Proses predasi dikenal sebagai fungsi respon, dimana fungsi respon *predator* terhadap *prey* adalah linier yang mengikuti Holling tipe I, sedangkan fungsi respon *super predator* terhadap *prey* mengikuti Holling tipe II. Parameter  $\alpha$  adalah laju pemangsaan *prey* oleh *predator*,  $\beta$  sebagai laju pemangsaan *prey* oleh *super predator*, dan  $\rho$  adalah waktu yang dibutuhkan oleh *super predator* untuk menangani *prey*. Sehingga laju pertumbuhan populasi *prey* dapat di tulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - \frac{\beta xz}{\rho x + 1}. \quad (1)$$

- b. Pertumbuhan Populasi *Predator*

Kepadatan populasi *predator* dinyatakan sebagai  $y$  pada waktu  $t$ . Laju pertumbuhan populasi *predator* mengikuti pertumbuhan model Lotka-Volterra yang menandai bahwa laju pertumbuhan populasi *predator* menurun secara eksponensial tanpa adanya *prey*. Diasumsikan tidak ada persaingan antara sesama *predator* untuk merebutkan makanan (*prey*). Dengan demikian model tersebut tidak mempertimbangkan adanya persaingan atau kompetisi antar *predator* untuk bertahan hidup di habitatnya. Pada model ini mempertimbangkan tingkat pertumbuhan populasi *predator* berasal dari konversi biomassa dari *prey* menjadi *predator* dalam parameter  $a$  dan juga laju pertumbuhan *predator* berkurang dengan adanya proses predasi *predator* oleh *super predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe II serta kematian alami *predator*. Parameter  $\delta$

sebagai laju predasi predator oleh super predator dan  $c$  adalah waktu yang dibutuhkan oleh super predator untuk menanggapi predator serta laju kematian alami  $n$ . Laju pertumbuhan predator dapat di tulis sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = axy - \frac{\delta yz}{cy+1} - ny. \quad (2)$$

c. Pertumbuhan Populasi super predator

Kepadatan populasi super predator dinyatakan sebagai  $z$  pada waktu  $t$ . Laju pertumbuhan populasi super predator berbentuk mengikuti pertumbuhan model Lotka-Volterra yang menandai bahwa laju pertumbuhan populasi super predator menurun secara eksponensial tanpa adanya prey dan predator. Dengan demikian model tersebut tidak mempertimbangkan adanya persaingan atau kompetisi antara predator dan super predator untuk bertahan hidup di habitatnya. Dalam model ini, tingkat pertumbuhan populasi super predator didapatkan dari konversi biomassa prey menjadi super predator dengan Holling tipe II dalam parameter  $b$  dan dari konversi biomassa predator menjadi super predator dengan Holling tipe II dalam parameter  $d$  serta parameter  $\rho$  dan  $c$  adalah waktu yang dibutuhkan oleh super predator untuk menanggapi prey dan predator. Laju pertumbuhan super predator berkurang dengan adanya kematian alami super predator dengan parameter  $m$ . Sehingga laju pertumbuhan super predator dapat di tulis sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{bxz}{\rho x+1} + \frac{dyz}{cy+1} - mz. \quad (3)$$

d. Hasil Konstruksi Model prey - predator - super predator

Berdasarkan asumsi yang telah diuraikan di atas, dan merujuk persamaan (1), (2), dan (3) maka diperoleh model interaksi antara prey-predator-super predator sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy - \frac{\beta xz}{\rho x + 1}, \\ \frac{dy}{dt} &= axy - \frac{\delta yz}{cy + 1} - ny, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{bxz}{\rho x + 1} + \frac{dyz}{cy + 1} - mz. \end{aligned} \quad (4)$$

Titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4) dapat di peroleh dengan membuat ruas kanan pada setiap persamaan sama dengan nol, maka:

$$\begin{aligned} \left[ r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy - \frac{\beta z}{\rho x + 1} \right] x &= 0, \\ \left[ ax - \frac{\delta z}{cy + 1} - n \right] y &= 0, \\ \left[ \frac{bx}{\rho x + 1} + \frac{dy}{cy + 1} - m \right] z &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga memberikan

- 1) Titik  $E_1 = (0,0,0)$ . Titik ini dikatakan sebagai titik dimana belum ada populasi sama sekali di suatu daerah (*virgin area*) atau titik ketika populasi yang ada di daerah tersebut mengalami kepunahan.
- 2) Titik  $E_2 = \left(0, -\frac{m}{cm-d}, \frac{nd}{(cm-d)\delta}\right)$ , yaitu menyatakan kondisi ketika tidak ada populasi prey. Titik  $E_2$  tidak terdefinisi secara biologis karena jika kondisi keeksisannya  $cm < d$  maka populasi super predator bernilai negatif. Sebaliknya, jika kondisi keeksisannya  $cm > d$  maka populasi predatornya bernilai negatif pula.
- 3) Titik  $E_3 = (k, 0, 0)$  menyatakan kondisi ketika tidak ada populasi predator dan populasi super predator.
- 4) Titik  $E_4 = \left(\frac{m}{(-m\rho+b)}, 0, \frac{rb(-kmp+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k}\right)$  menyatakan kondisi ketika tidak ada populasi predator. Titik  $E_4$  secara biologis terdefinisi jika  $b > m\rho$  dan  $bk > kmp + m$ .
- 5) Titik  $E_5 = \left(\frac{n}{a}, \frac{r(ak-n)}{aak}, 0\right)$  menyatakan kondisi ketika tidak ada populasi super predator. Titik  $E_5$  terdefinisi secara biologis jika  $n < ak$ .
- 6) Titik  $E_6 = (x^*, y^*, z^*)$  merupakan titik eksistensi dari semua populasi. Pada titik  $E_6 = (x^*, y^*, z^*)$  dinyatakan bahwa  $x^*$  adalah solusi positif dari persamaan kuadrat

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Dimana

$$\begin{aligned} A &= \delta r(\rho(d - cm) + bc) \\ B &= \delta kmp(cr + \alpha) - \delta kr(bc + d\rho) + (a\beta d - ab\delta) + \delta r(d - cm) \\ C &= \delta km(cr + \alpha) - dk(\beta n + \delta r) \end{aligned}$$

2. Titik Kesetimbangan

Keadaan akar positif  $x^*$  terpenuhi jika  $B < 0$  dan  $C > 0$ . Selanjutnya dapat diturunkan  $y^*$  dan  $z^*$  masing masing diberikan oleh

$$y^* = \frac{(-\alpha\beta ckmpx^* - \alpha\delta km\rho^2 x^* + ab\beta ckx^* + ab\delta k\rho x^* + \beta ckmn\rho - \alpha\delta km\rho - b\beta ck m - bc\delta k\rho + bc\delta r x^*)}{(-cm\rho + bc + d\rho)k(\alpha\beta cx^* + \alpha\delta\rho x^* - \beta cn + \alpha\delta)}$$

$$z^* = \frac{-(\alpha^2\beta^2 cd^2 k^2 \rho x^* + abc^2\delta^2 m^2 x^* - abc^2\delta d^2 r^2 - \alpha^2\beta c d^2 \delta k^2 r \rho^2 - \alpha^2\beta c d^2 d\delta k r x^* + \alpha^2\beta c d^2 \delta k r \rho x^* + \alpha d^2 \delta k n \rho^2 x^* + bc^2\delta^2 m m^2 \rho x^* - bc^2\delta^2 n r^2 \rho x^* + aa^2\delta^2 k^2 r \rho^2 x^* + a^2\alpha\beta d^2 \delta k^2 r \rho^2 x^* - aa^2\beta d^2 \delta k^2 r \rho^2 x^* - bc^2\delta^2 k m n r^2 \rho - \alpha^2\beta c d^2 \delta k r \rho - aa\beta d^2 \delta k^2 n r^2 \rho^2 - \beta c d^2 \delta k n r^2 \rho^2 - aabc^2\delta^2 k m r - b^2 c^2 \delta^2 n r^2 x^* + b^2 c^2 \delta^2 k n r^2 + a^2\beta c^2 d^2 \delta k^2 m r \rho^2 x^* + aacd\delta^2 k^2 m r \rho^2 x^* + a^2\alpha\beta c d^2 \delta k^2 m \rho^2 - a^2\beta c d^2 \delta k^2 r \rho^2 - aabc d^2 k^2 r \rho^2 x^* - a^2\alpha\beta c d^2 k^2 r \rho x^* + a^2\beta c^2 d^2 \delta k m r \rho x^* + 2a\beta c d^2 \delta k n r \rho^2 x^* + abc d^2 k n r \rho^2 x^* - 2aabc d^2 k r \rho x^* - 2a\beta c^2 d^2 \delta k m r \rho^2 x^* + 2ab\beta c^2 d^2 \delta k n r \rho x^* + a^2\beta c^2 d^2 \delta k m r \rho + aacd\delta^2 k^2 m r \rho^2 + \beta c^2 d^2 \delta k m n r^2 \rho^2 + a^2\alpha\beta c d^2 \delta k^2 m \rho - abc^2\delta^2 k m r \rho - a^2\alpha\beta c d^2 k^2 m r \rho - a^2\beta c^2 d^2 \delta k n r \rho + 2a\beta c d^2 \delta k n r \rho + a^2\beta c^2 d^2 \delta k m r \rho - a^2\beta c^2 d^2 k^2 n r \rho + ab\beta c^2 d^2 \delta k^2 m \rho + 2abc d^2 \delta k n r \rho - abc^2\delta^2 k m r^2 + ab^2 c^2 \delta^2 k n r + ad^2 \delta k n r \rho - a^2\beta^2 c d^2 k^2 n \rho + (r(-cm\rho + bc + d\rho)^2 \delta^2 (\alpha\beta cx^* + \alpha\delta\rho x^* - \beta cn + \alpha\delta)k)}{(r(-cm\rho + bc + d\rho)^2 \delta^2 (\alpha\beta cx^* + \alpha\delta\rho x^* - \beta cn + \alpha\delta)k)}$$

3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Model *prey-predator-super predator* pada sistem persamaan (4) merupakan sistem persamaan diferensial non linear, sehingga untuk mengetahui kestabilan dari sistem tersebut diperlukan proses linearisasi. Proses linearisasi dilakukan menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{x}{k}) - \frac{rx}{k} - \alpha y - \frac{\beta z}{\rho x + 1} + \frac{\beta x z \rho}{(\rho x + 1)^2} & -\alpha x & -\frac{\beta x}{\rho x + 1} \\ \alpha y & \frac{\delta z}{cy + 1} + \frac{\delta y z c}{(50c + 1)^2} - n & -\frac{\delta y}{cy + 1} \\ \frac{\beta z}{\rho x + 1} - \frac{\beta x z \rho}{(\rho x + 1)^2} & \frac{dz}{cy + 1} - \frac{d y z c}{(cy + 1)^2} & \frac{bx}{\rho x + 1} + \frac{dy}{cy + 1} - m \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui perilaku dinamis dari sistem persamaan (4) secara analisis, dapat dilakukan dengan analisis kestabilan lokal menggunakan nilai eigen yang dihasilkan dari masing masing titik kesetimbangan yang disubstitusikan pada matriks Jacobian.

1) Analisis Kestabilan titik  $E_1 = (0,0,0)$

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan ketiga populasi  $E_1 = (0,0,0)$  adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan karakteristik dari matriks Jacobian  $J(E_1)$  dengan  $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$  yaitu

$$(r - \lambda)(-n - \lambda)(-m - \lambda) = 0.$$

Nilai eigen dari matrik  $J(E_1)$  adalah  $\lambda_1 = r, \lambda_2 = -n, \lambda_3 = -m$  oleh karena itu, titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil, dan jenis kestabilannya adalah *saddle point*.

2) Analisis Kestabilan titik  $E_3 = (k, 0, 0)$

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan populasi *predator* dan *super predator*  $E_3 = (k, 0, 0)$  adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -r & -ak & -\frac{\beta k}{k\rho + 1} \\ 0 & ak - n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{bk}{k\rho + 1} - m \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian  $J(E_3)$  dengan  $\det(J(E_3) - \lambda I) = 0$  yaitu

$$(\lambda + r)(ak - \lambda - n)(-k\lambda\rho - km\rho + bk - \lambda - m),$$

Nilai eigen dari matrik  $J(E_3)$  adalah  $\lambda_1 = -r,$

$$\lambda_2 = ak - n, \quad \text{dan} \quad \lambda_3 =$$

$$-\frac{km\rho + bk - m}{k\rho + 1} \text{ sehingga } E_3 = (k, 0, 0) \text{ stabil}$$

asimtotik jika  $ak < n$  dan  $bk < km\rho + m$ .

3) Analisis Kestabilan titik  $E_4 = (\frac{m}{(-m\rho+b)}, 0, \frac{rb(-km\rho+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k})$

Misalkan  $x_4 = \frac{m}{(-m\rho+b)}$  dan  $z_4 = \frac{rb(-km\rho+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k}$

Matriks Jacobian dari titik kepunahan populasi *predator*  $E_4 = (x_4, 0, z_4)$  adalah

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix},$$

dengan

$$k_{11} = r(1 - \frac{x_4}{k}) - \frac{rx_4}{k} - \frac{\beta z_4}{\rho x_4 + 1} + \frac{\rho x z}{(\rho x_4 + 1)^2},$$

$$k_{12} = -\alpha x_4,$$

$$k_{13} = -\frac{\beta x_4}{\rho x_4 + 1},$$

$$k_{22} = \alpha x_4 - \delta z_4 - n,$$

$$k_{31} = \frac{\beta z_4}{\rho x_4 + 1} - \frac{\beta x_4 z_4 \rho}{(\rho x_4 + 1)^2},$$

$$k_{32} = dz_4,$$

$$k_{33} = \frac{\beta x_4}{x_4 \rho + 1} - m,$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan karakteristik dari matriks Jacobian  $J(E_4)$  menggunakan  $\det(J(E_4) - \lambda I) = 0$  yaitu

$$(k_{22} - \lambda)(\lambda^2 + T_1\lambda + D_1),$$

dengan demikian salah satu nilai eigen  $J(E_4)$  adalah  $\lambda_1 = \alpha x_4 - \delta z_4 - n$ , sedangkan nilai eigen lainnya ditentukan oleh  $\lambda^2 + T_1\lambda + D_1 = 0$ ,

$$\text{dimana } T_1 = -\left(r(1 - \frac{x_4}{k}) - \frac{rx_4}{k} - \frac{\beta z_4}{\rho x_4 + 1} + \frac{\rho x z}{(\rho x_4 + 1)^2} + \frac{\beta x_4}{\rho x_4 + 1} - m\right) < 0 \text{ dan } D_1 = \left(\left(r(1 - \frac{x_4}{k}) - \frac{rx_4}{k} - \frac{\beta z_4}{\rho x_4 + 1} + \frac{\rho x z}{(\rho x_4 + 1)^2}\right)\left(\frac{\beta x_4}{\rho x_4 + 1} - m\right) - \left(-\frac{\beta x_4}{\rho x_4 + 1}\right)\left(\frac{\beta z_4}{\rho x_4 + 1} - \frac{\beta x_4 z_4 \rho}{(\rho x_4 + 1)^2}\right)\right) > 0.$$

Karena  $T_1 < 0$  dan  $D_1 > 0$ , kita punya  $\lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_3 < 0$ .

oleh karena itu, titik  $E_4 = (\frac{m}{(-m\rho+b)}, 0, \frac{rb(-km\rho+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k})$  akan stabil asimtotik jika  $\lambda_1 = \alpha x_4 - \delta z_4 - n = \frac{am}{(-m\rho+b)} - \frac{\delta rb(-km\rho+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k} - n < 0$  atau

$$\text{ketika } \frac{am}{(-m\rho+b)} < \frac{\delta rb(-km\rho+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k} + n.$$

- 4) Analisis Kestabilan titik  $E_5 = \left(\frac{n}{a}, \frac{r(ak-n)}{aak}, 0\right)$ .  
 Misalkan  $x_5 = \frac{n}{a}$  dan  $z_5 = \frac{r(ak-n)}{aak}$ . Matriks Jacobian dari titik kepunahan populasi *super predator*  $E_5 = (x_5, y_5, 0)$  adalah

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix},$$

dengan

$$k_{11} = r \left(1 - \frac{x_5}{k}\right) - \frac{rx_5}{k} - \alpha y_5,$$

$$k_{12} = -\alpha x_5,$$

$$k_{13} = -\frac{\beta x_5}{\rho x_5 + 1},$$

$$k_{21} = \alpha y_5,$$

$$k_{23} = \frac{\delta y_5}{cy_5 + 1},$$

$$k_{33} = \frac{bx_5}{\rho x_5 + 1} + \frac{dy_5}{cy_5 + 1} - m,$$

Diperoleh persamaan karakteristik yaitu  $\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$ ,

dengan

$$A_1 = -\left(r \left(1 - \frac{x_5}{k}\right) - \frac{rx_5}{k} - \alpha y_5\right) - \left(\frac{bx_5}{\rho x_5 + 1} + \frac{dy_5}{cy_5 + 1} - m\right)$$

$$A_2 = \left(r \left(1 - \frac{x_5}{k}\right) - \frac{rx_5}{k} - \alpha y_5\right) \left(\frac{bx_5}{\rho x_5 + 1} + \frac{dy_5}{cy_5 + 1} - m\right) - (-\alpha x_5)(\alpha y_5)$$

$$A_3 = (-\alpha x_5)(\alpha y_5) \left(\frac{bx_5}{\rho x_5 + 1} + \frac{dy_5}{cy_5 + 1} - m\right)$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, semua nilai eigen akan bernilai negatif apabila  $A_1 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$  maka  $E_5$  stabil asimtotik.

- 5) Analisis Kestabilan titik  $E_6 = (x^*, y^*, z^*)$   
 Matriks Jacobian dari titik keeksian ketiga populasi  $E_6 = (x^*, y^*, z^*)$  adalah

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta x^* z^* \rho}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2} & -\alpha x^* & -\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} \\ \alpha y^* & \frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n & -\frac{\delta y^*}{cy^* + 1} \\ \frac{\beta z^*}{\rho x^* + 1} - \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2} & \frac{dz^*}{cy^* + 1} + \frac{dy^* z^* c}{(cy^* + 1)^2} & \frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{dy^*}{cy^* + 1} - m \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu  $\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$ ,

dengan

$$A_1 = -\left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta z^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) + \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) + \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{dy^*}{cy^* + 1} - m\right)$$

$$A_2 = \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta z^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) \left(\frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n\right) + \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) \left(\frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n\right) \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{dy^*}{cy^* + 1} - m\right) - (-\alpha x^*)(\alpha y^*) - \left(-\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1}\right) \left(\frac{dz^*}{cy^* + 1} + \frac{dy^* z^* c}{(cy^* + 1)^2}\right) - \left(-\frac{\delta y^*}{cy^* + 1}\right) \left(\frac{dz^*}{cy^* + 1} + \frac{dy^* z^* c}{(cy^* + 1)^2}\right)$$

$$A_3 = -\left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta z^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) \left(\frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n\right) \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{dy^*}{cy^* + 1} - m\right) + (-\alpha x^*) \left(-\frac{\delta y^*}{cy^* + 1}\right) \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} - \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) + \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) (\alpha y^*) \left(\frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n\right) + \left(-\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1}\right) \left(\frac{\delta x^*}{cy^* + 1} + \frac{\delta y^* z^* c}{(50c+1)^2} - n\right) \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} - \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) + \left(\frac{dz^*}{cy^* + 1} + \frac{dy^* z^* c}{(cy^* + 1)^2}\right) \left(-\frac{\delta y^*}{cy^* + 1}\right) \left(r \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{rx^*}{k} - \alpha y^* - \frac{\beta z^*}{\rho x^* + 1} + \frac{\beta x^* z^* \rho}{(\rho x^* + 1)^2}\right) + (-\alpha x^*)(\alpha y^*) \left(\frac{\beta x^*}{\rho x^* + 1} + \frac{dy^*}{cy^* + 1} - m\right)$$

Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas

bernilai negatif jika  $A_1 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$  maka titik  $E_6$  stabil asimtotik.

Tabel 2: Jenis dan Kondisi stabilitas

Titik Kesetimbangan	Jenis Kestabilan	Kondisi Stabilitas
$E_1$	Tidak stabil (Titik Saddle)	-
$E_3$	Stabil Asimtotik	$ak < n$ dan $bk < kmp + m$
$E_4$	Stabil Asimtotik	$\frac{am}{(-mp + b)} < \frac{\delta r b(-kmp + bk - m)}{(-mp + b)^2 \beta k} + n$
$E_5$	Stabil Asimtotik	$A_1 > 0, A_3 > 0$ dan $A_1A_2 - A_3 > 0$
$E_6$	Stabil Asimtotik	$A_1 > 0, A_3 > 0$ dan $A_1A_2 - A_3 > 0$

4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini digambarkan simulasi numerik dari sistem persamaan (4) dengan nilai parameter yang diberikan sesuai Tabel 4. Beberapa parameter menyebabkan perubahan kestabilan pada titik kesetimbangan.

Berdasarkan syarat keberadaan titik kesetimbangan, maka salah satu parameter yang diindikasikan dapat mempengaruhi perubahan pada titik kesetimbangan adalah  $\rho$ . Secara lengkap pemilihan nilai pada parameter ada 2 yaitu dari referensi dan asumsi disajikan pada tabel berikut:

Tabel 3: Nilai Parameter

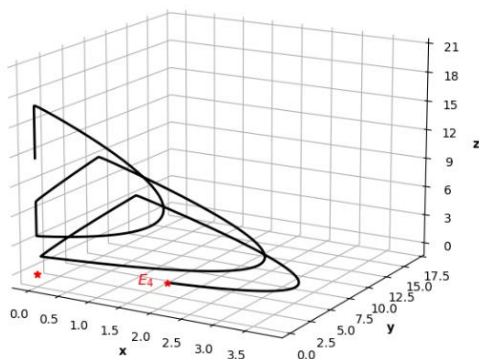
Parameter	Keterangan	Nilai	Referensi
$r$	Laju pertumbuhan intrinsik	12	Asumsi
$k$	Daya tampung lingkungan	9,8	Roy & Roy, 2015
$\alpha$	Laju pemangsaan prey oleh predator	1,9	Savitri & Hasan, 2020
$\beta$	Laju pemangsaan prey oleh super predator	1,3	Roy & Roy, 2015
$\delta$	Laju pemangsaan predator oleh super predator	1,2	Roy & Roy, 2015
$a$	Konversi biomassa prey menjadi predator	2,1	Asumsi
$b$	Konversi biomassa prey menjadi super predator	1,54	Asumsi

$d$	Konversi biomassa predator menjadi <i>super predator</i>	0,64	Asumsi
$c$	Waktu yang dibutuhkan <i>super predator</i> untuk memangsa predator	50	Asumsi
$m$	Kematian alami <i>super predator</i>	0,02	Asumsi
$n$	Kematian alami predator	0,01	Asumsi

Pada artikel ini dipilih parameter  $\rho$  atau parameter waktu yang dibutuhkan *super predator* untuk menangani predator. Simulasi numerik dilakukan dengan menetapkan nilai parameter  $\rho$  yang berbeda-beda ( $\rho = 0,1, \rho = 0.2, \rho = 0.3$ ) Perilaku dinamis tersebut ditampilkan melalui potret fase dengan *software* Python sebagai berikut:

Kasus 1:

Ketika  $\rho = 0.1$ , didapatkan bahwa  $0,27768 = \frac{am}{(-m\rho+b)} < \frac{\delta r b(-k m \rho + b k - m)}{(-m\rho+b)^2 \beta k} + n = 7444525,72$  dan oleh karena itu syarat stabilitas  $E_4$  terpenuhi. Pada kasus ini titik  $E_4 = (0,0131; 0; 9,230)$  stabil asimtotik.



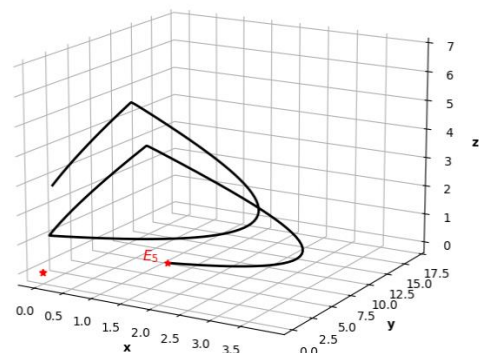
Gambar 1. Potret Fase dengan  $\rho = 0,1$

Simulasi numerik pertama, dengan mengambil populasi awal *prey* sebesar 3,6, populasi awal predator sebesar 1,06, serta populasi *super predator* sebesar 2,8 ditunjukkan pada Gambar 1 yang mengilustrasikan melalui potret fase bahwa solusinya menuju titik  $E_4$  yang

stabil, dimana populasi predator mengalami kepunahan. Jika kita ambil  $\rho = 0,1$ , maka diperoleh titik kesetimbangan  $E_4 = (0,0131; 0; 9,230)$  stabil. Titik kesetimbangan  $E_4$  stabil secara asimtotik karena syarat kestabilannya terpenuhi. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 terdapat kesesuaian hasil perhitungan analisis dan simulasi numerik.

Kasus 2:

Ketika  $\rho = 0,2$ , didapatkan  $A_1 A_2 - A_3 > 0$  dengan  $A_1 = 0,00266281, A_2 = 0,1199232, A_3 = -0,000379987$  sehingga diperoleh  $0,0006993 > 0$  dengan syarat kestabilan Routh Hurwitz terpenuhi untuk  $E_5$ . Tidak ada titik kesetimbangan stabil kecuali  $E_5 = (0,00476; 6,3127; 0)$  stabil asimtotik.



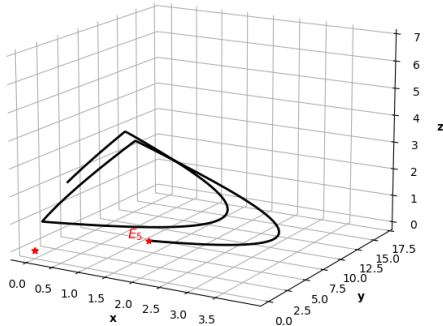
Gambar 2. Potret Fase dengan  $\rho = 0,2$

Simulasi numerik kedua, dengan populasi awal *prey* sebesar 3,6, populasi awal predator sebesar 1,06, serta populasi *super predator* sebesar 2,8. Berdasarkan nilai parameter dari Tabel 4, dengan  $\rho = 0,2$ , dinamika solusi sistem (4) ditampilkan melalui potret fase pada Gambar 2. Grafik potret fase tersebut menunjukkan bahwa solusi sistem (4) menuju titik kesetimbangan  $E_5$  stabil, yaitu titik yang merepresentasikan hanya terdapat populasi *prey* dan populasi predator. Hasil simulasi pada Gambar 2 menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis. Jika nilai parameter  $\rho = 0,2$  maka diperoleh titik kesetimbangan  $E_5 = (0,00476; 6,3127; 0)$ . Titik kesetimbangan  $E_5$  stabil secara asimtotik karena syarat kestabilannya terpenuhi. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2 terdapat kesesuaian hasil analisis dan simulasi numerik.

Kasus 3:



Ketika parameter waktu yang dibutuhkan *super predator* untuk menangani *predator* meningkat,  $\rho = 0,3$ , edngan  $A_1 = 0,002666248, A_2 = 0,1199232$ , dan  $A_3 = -0,0003795$  sehingga diperoleh  $A_1A_2 - A_3 = 0,0006993 > 0$  dan oleh karena itu Routh Hurwitz dalam syarat stabilitas  $E_5$  terpenuhi. Pada kasus ini tidak ada titik kesetimbangan yang stabil kecuali titik  $E_5 = (0,00476; 6,3127; 0)$  stabil asimtotik.



Gambar 3. Potret Fase dengan  $\rho = 0,3$

Simulasi numerik ketiga dengan populasi awal *prey* sebesar 3,6, populasi awal *predator* sebesar 1,06, serta populasi *super predator* sebesar 2,8, ditunjukkan pada Gambar 3. Berdasarkan gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa solusi sistem (4) menuju titik kesetimbangan  $E_5$  yang stabil, dimana hanya terdapat populasi *prey* dan populasi *predator*. Berdasarkan diagram potret fase pada Gambar 3 menunjukkan kesesuaian antara hasil analisis dan simulasi numerik. Meningkatnya parameter waktu yang dibutuhkan *super predator* untuk menangani *predator*  $\rho = 0,3$ , diperoleh keadaan setimbang  $E_5 = (0,00476; 6,3127; 0)$  stabil secara asimtotik karena syarat kestabilannya terpenuhi. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3 terdapat kesesuaian hasil analisis dan simulasi numerik.

Hasil pada penelitian ini lebih kompleks daripada penelitian oleh (Savitri & Hasan, 2020), karena pada penelitian ini *super predator* tidak hanya memangsa *predator* tetapi juga memangsa *prey*. Selain itu, penelitian ini sesuai dengan kondisi nyata di alam, dimana populasi katak yang merupakan *super predator* membutuhkan waktu juga dalam menangani mangsa, yaitu laba laba yang merupakan *predator*. Ketika katak menangani nyamuk yang merupakan *prey*, katak

juga membutuhkan waktu untuk mencari dan menangkap nyamuk. Hal ini sesuai dengan fungsi respon yang digunakan pada model, yaitu fungsi respon Holling tipe II. Begitu pula ketika Laba-laba memangsa nyamuk waktu penanganannya diabaikan karena laba laba merupakan *predator* yang pasif atau lebih suka menunggu *prey*-nya, sehingga fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe I.

## PENUTUP

### SIMPULAN

Hasil analisis kestabilan pada model interaksi *prey-predator-super predator* dengan fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II, diperoleh lima titik kesetimbangan, yaitu  $E_1 = (0,0,0), E_3 = (k, 0, 0), E_4 = \left( \frac{m}{(-m\rho+b)}, 0, \frac{rb(-kmp+bk-m)}{(-m\rho+b)^2\beta k} \right)$ ,  $E_5 = \left( \frac{n}{a}, \frac{r(ak-n)}{aak}, 0 \right)$  dan  $E_6 = (x^*, y^*, z^*)$ . Titik kesetimbangan  $E_1$  yang menunjukkan kepunahan semua populasi merupakan titik saddle. Titik  $E_4$  dan  $E_5$  stabil asimtotik dengan syarat tertentu. Berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan dan simulasi numerik menunjukkan bahwa parameter waktu yang dibutuhkan *super predator* untuk menangani *prey* mengendalikan dinamika solusi model dan menjaga populasi *prey* tidak punah.

### SARAN

Penelitian selanjutnya, perlu dilakukan analisis bifurkasi. Hasil analisis bifurkasi diharapkan dapat memberikan diagram bifurkasi dari sistem, yang memperlihatkan perubahan kestabilan dan hubungan dari semua solusi pada sistem.

### DAFTAR PUSTAKA

- Abadi, & savitri, D. (2015). stability Analysis of three species food chain with competition. *AIP conference Proceedings*.
- Chakraborty, S., Samares, P., & Bairagi, N. (2012). Predator-prey interaction with harvesting: mathematical study with biological ramifications. *Applied Mathematical Modelling*.
- Savitri, D., & Abadi. (2015). Stability Analysis and Numerical Simulation of 1 prey-2 predator System. *AIP Conference Proceedings*.

- H. Ulfa, A. S. (2017). Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with additional food for predators. *International Journal of pure and applied mathematics*, 115.
- M. L. Rosenzweig, R. H. (1963). graphical representation and stability condition of predator-prey interaction. *The american Naturalist*, 97.
- M. Moustafa, M. H. (2019). Stage structure and refuge effects in the dynamics analysis of a fractional order Rosenzweig-MacArthur prey-predator model. *Progress in Fractional Differential and Application*, 5, 49-64.
- Olsder, G. J., & Woude, J. W. (1998). *Mathematical System Theory*. Delft University Press.
- Reddy, K. S., Narayan, K. L., & Ramacharyulu, N. C. (2010). A three Species Ecosystem Consisting of a Prey predator and super predator. *Mathematics Applied in Science and Technology*.
- Roy, B., & Roy, S. K. (2015). Analysis of prey-predator three species models with vertebral and invertebral predators. *International Journal of Dynamics and Control*, 306-312.
- Saija, L. K. (2020). A stage-structure Rosenzweig-MacArthur model with effect of prey refuge. *Jambura Journal of Biomathematics (JJBm)*, 1, 1-7.
- Sarwardi, P., Mandal, K., & Ray, S. (2013). Dynamical Behaviour of a two-predator model with prey refuge. *Journal of Biological Physics*.
- Savitri, D., & Paniogoro, H. S. (2020). Bifurkasi Hopf pada model prey predator super predator dengan fungsi respon yang berbeda. *Journal Jambura Biomath*.
- Savitri, D., Suryanto, A., Kusumawinahyu, W. M., & Abadi. (2019). A Dynamics Behaviour of Two Predators and One Prey Interaction with Competition Between Predators. *IOP conference series:Materials Science and Engineering*.
- Solomon, M. E. (1949). The natural control of animal population. *the journal of animal ecology*.
- wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos* (second ed., Vol. 75). New York: Springer-Verlag.
- Y. Lin, X. (2016). Convergences of a stage-structured predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes. *Advances in Difference Equation*.
- Y.Cai, C. J. (2015). Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *Applied Mathematics Modelling*, 39.